Ejercicios clases 1,2,3 y 4

Modificado de los ejercicios del prof. Peter Hummelgens

31-Marzo-2008

1) Demuestre que δ_a, $(a \in \mathbb{R})$ es una distribución singular.

2) Cuales de las siguientes expresiones definen una distribución. Aquí f es una función prueba.
   a) $\langle f, \phi \rangle = \sum_{n=0}^{N} f^{(n}(0)$ con $N > 1$ entero.
   b) $\langle f, \phi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n}(0)$.
   c) $\langle f, \phi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n}(n)$.
   d) $\langle f, \phi \rangle = |f(0)|^2$
   e) $\langle f, \phi \rangle = \sup f(x)$
   f) $\langle f, \phi \rangle = \int_{-1}^{1} |f(x)| dx$

3) Demuestre que $x\delta(x) = 0$, $x\delta'(x) = -\delta(x)$.

4) Demuestre que $x\delta^{(k}(x) = -k\delta^{(k-1}(x); \qquad k = 1, 2, 3..$

5) Simplifique ($a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{C}$)
   a) $(x - a)\delta_a'(x)$
   b) $x^2\delta''(x)$
   c) $(e^{\lambda x} - 1)\delta''(x)$

6) Demuestra que, en general,

$$x^n \delta^{(m}(x) = \begin{cases} 0 & m < n \\ (-1)^n n! \delta(x) & m = n \\ (-1)^m \frac{m!}{(m-n)!} \delta^{(m-n}(x) & m > n \end{cases}$$

7) Sean $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\phi \in C^\infty(\Omega)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ un abierto. Demuestre la regla de Leibniz

$$(\phi T)' = \phi' T + \phi T'$$

8) Demuestra que si una distribución $\phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ verigica que $\phi'_{\text{gen}} = 0$ entonces es una constante.

9) Sea $f(x) = h(x)\,\mathrm{sen}(x)$, donde $h(x)$ es la función de Heaviside. Halle las dos primeras derivadas generalizadas de $f(x)$.

10) Sea la ecuación diferencial (ED)

$$xu''(x) + (x+3)u'(x) + u(x) = 0; \qquad -\infty < x < \infty$$

en el sentido distribucional (es decir $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$) y las derivadas son distribucionales). Verifique que $u_1(x) = \delta(x) + \delta'(x)$ es solución.

11) Sea el operador diferencial $L = x\frac{d}{dx}$ en $\mathbb{R}$. Una distribución $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ se llama solución fundamental (s.f.) de $L \Leftrightarrow LE = \delta$. Demuestre que $E(x) = A + Bh(x) - \delta(x)$ con $A, B \in \mathbb{C}$ arbitrarias es una s.f. de L.

12) Halle $A, B \in \mathbb{C}$ tal que $A + B\delta'(x)$ sea solución de

$$x^2u''(x) + xu'(x) - 4u(x) = 0; \qquad -\infty < x < \infty$$

13) Determine una solución fundamental de L cuando

a) $L = x^2\frac{d^2}{dx^2} + x\frac{d}{dx} - 4$

b) $L = x^3\frac{d}{dx} + 2$

14) Supon que $\phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ es una distribución tal que $x\phi = 0$, demuestra que $\phi = a\delta$ para alguna constante a.

15) Se puede demostrar que para $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ y $n \geq 1$ entero se tiene

$$x^nT = 0 \Leftrightarrow T = \sum_{k=0}^{n-1} c_k\delta^{(k}$$

para ciertas constantes c_k.

a) Demuestre la parte $\Leftarrow$.

b) Utilizando este resultado halle la solución general de la ecuación diferencial $xu'(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}$.

16) Encuentre la solución fundamental general de L en los siguientes casos:

a) $L = \frac{d}{dx} + a$, con $a \neq 0$

b) $L = \frac{d^2}{dx^2} + k^2$, con $k \in \mathbb{R}$

c) $L = \frac{d^2}{dx^2} - k^2$, con $k \in \mathbb{R}$

d) $L = \frac{d^3}{dx^3} - 3\frac{d^2}{dx^2} + 3\frac{d}{dx} - 1$

17) Resuelve la ecuación diferencial

$$u'(x) + u(x) = \delta''(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

18) Resuelva el problema de valor inicial

$$\begin{cases} u''(x) + 4u(x) = 0; \qquad x \in \mathbb{R} \\ \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = -2 \end{cases}$$

19) Sea

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 1 - x & 1 < x < 2 \\ 0 & \text{otro } x \end{cases}$$

Halle las tres primeras derivadas de $f(x)$

20) Sea

$$f(x) = \begin{cases} |\operatorname{sen} x| & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{otro } x \end{cases}$$

Halle las tres primeras derivadas de $f(x)$

21) Sea $f(x) = 1 - x^2$ con $x \in [-1, 1]$. Se pide hallar:

$$I = \int_{-1}^{1} f(x) \cos(n\pi x) dx \qquad n \geq 1 \text{ entero}$$

22) Se pide hallar ($\lambda > 0$ contante)

$$I = \int_{0}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(\lambda x) dx$$

con

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ x - \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} < x < \pi \\ 0 & \text{otro } x \end{cases}$$

23) Para $t > 0$ se pide calcular la siguiente integral de convolución

$$I(t) = \int_{0}^{t} \operatorname{sen}(2\xi) \operatorname{sen}(t - \xi) d\xi$$

24) Se pide hallar

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{\lambda x} dx, \quad \lambda > 0 \tag{1}$$

Donde

$$f(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x & -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ 1 & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen} x & \frac{\pi}{2} < x < \pi \\ 0 & \text{otro } x \end{cases}$$

25) Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -a < x < a \\ 0 & \text{otro } x \end{cases}$$

donde $a > 0$ es una constante. Definimos la transformdaa de Fourier de $f(x)$ como la función

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx, \qquad \omega \in \mathbb{R}, \quad i = \sqrt{-1}$$

Halla $\hat{f}(\omega)$

26) Halle la transformada de Fourier (ver ejercicio 21) de $f(x) = e^{-a|x|}$, con $a > 0$ una constante.

27) Halle la transformada de Fourier (ver ejercicio 21) de

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{otro } x \end{cases}$$

28) Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & -1 < x < 0 \\ 1 - x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{otro } x \end{cases}$$

Definimos la transformada de Laplace de $f(x)$ por

$$F(z) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xz} f(x) dx, \qquad z \in \mathbb{C}$$

Halle $F(z)$.

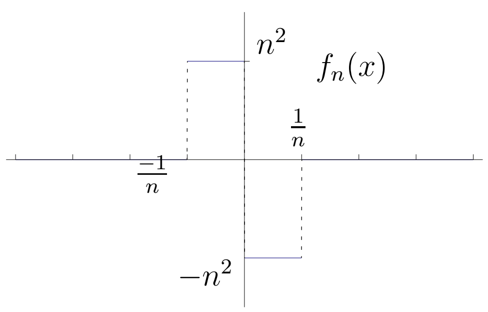
29) Sea

$$f_n(x) = \begin{cases} n & 0 < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{otro } x \end{cases}$$

a) Demuestra que $f_n \overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\longrightarrow} \delta$ si $n \to \infty$

b) Verifique que $(f_n)'_{\text{gen}} \overset{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}{\longrightarrow} \delta'$ si $n \to \infty$

30) Sea $f_n(x)$ con gráfica



halle $\lim_{n\to\infty} f_n$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

31) Sea

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 & |x| < \frac{1}{n} \\ 0 & |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Demuestre que $\{f_n\}$ no converge en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

32) Sea $\{a_n\}_{n=0,\pm1,\ldots}$ una sucesión de números reales tal que $|a_n| \to \infty$ y sea $\{c_n\}$ una sucesión de números complejos. Demuestre que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta_{a_n}$ converge en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

33) Sea $f(x) = 3x^3(H(x+1) - H(x-1))$. Halle $f'_{\text{gen}}(x)$.

34) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua con $f(x) = 0$ en $-\infty < x < -2$ y en $2 < x < \infty$, y tal que $f''_{\text{gen}}(x) = \delta(x+2) - \delta(x+1) - \delta(x-1) + \delta(x-2)$. Grafique $f(x)$ y halle

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(nx)dx, \quad n \geq 1 \text{ entero}$$

35) Sea $f \in C(\mathbb{R})$ con $\text{sop}(f) \subseteq [0,1]$ y sea

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n)\delta(x - k/n), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Determine $\lim_{n\to\infty} \Psi_n(x)$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

36) Prueba que, en el sentido de las distribuciones:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\delta_{a+h} - \delta_a}{h} = \delta'_a$$

37) Sea $f \in \mathrm{L}'_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Demuestre:

a) Para cada $a \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\langle f(x-a), \varphi(x)\rangle = \langle f(x), \varphi(x+a)\rangle, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

b)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'_{\text{gen}}(x) \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

38) Dado que $\log(|x|)$ es localmente integrable (nota que incluso en torno al 0), el funcional lineal

$$F(g) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\log(|x|)dx, \qquad g \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$$

es una distribución. Verifica que la derivada distribucional se puede escribir en términos del valor principal de Cauchy:

$$F'_{\text{gen}}(g) = \text{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{x}dx = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{g(x)}{x}dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{g(x)}{x}dx\right)$$

39) Demuestra que la aplicación que a cada función $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ le asigna

$$\phi(f) = \int_0^\infty \frac{f(x) - f(0)}{t^{3/2}}$$

es una distribución singular.

40) En este ejercicio vamos a probar que cualquier función $C_0(\mathbb{R})$ se puede aproximar por funciones en $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = C_0^\infty(\mathbb{R})$.

a) Prueba que

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & |x| > 0 \\ \exp\left(\frac{-1}{1-x^2}\right) & |x| < 1 \end{cases}$$

Está en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, esto es no es vacío.

b) Sea ahora $f(x) \in C_0(\mathbb{R})$ una función continua de soporte compacto. Definimos

$$g(x) = \frac{f(x)}{M}$$
$$M = \int_{-\infty}^\infty \phi(x)dx$$

Prueba que $0{,}4 < M < 0{,}5$ (de hecho $M \sim 0{,}4439938162...$)

c) Demuestra que $ng(x/n) \to \delta$ en el sentido de las distribuciones

d) Demuestra que las funciones $f_n(x)$

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^\infty f(y)g_n(x-y)dy$$

pertenecen a $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

e) Deducir que distribucionalmente $\lim_{n\to} f_n(x) = f(x)$

f) Con un poco más de paciencia puedes probar que $f_n(x)$ tienen uniformemente a $f(x)$. Es decir que $\forall\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{Z}$ tal que $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$, $\forall x$.

41) Funcionales no lineales y aplicaciones a la física. En este ejercicio vamos a reformular la mecánica en términos de un principio de mínimo para un funcional no lieneal. Sea $C_{a,b}^\infty([0,T]) = \{x : [0,T] \to \mathbb{R}\}$ el conjunto de todas las funciones infinitamente diferenciables tales que $x(0) = a$ y $x(T) = b$. Dada una función $V(x)$, llamada potencial definimos el funcional (llamado funcional de acción):

$$S(x) = \int_0^T \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) - V(x(t))\right) dt$$

a) Demuestra que es un funcional no lineal.

b) Considera ahora una función infinitamente diferenciable que cumpla $\eta(0) = \eta(T) = 0$. Entonces las funciones $\tilde{x}(t) = x(t) + \alpha\eta(t)$ estan en $C^{\infty}_{a,b}([0,T])$., donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Prueba que la función $F(\alpha) = S(x+\alpha\eta)$ posee un mínimo en $\alpha = 0$ si y sólo si se satisfacen las ecuaciones de Newton

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial V(x)}{\partial x}$$